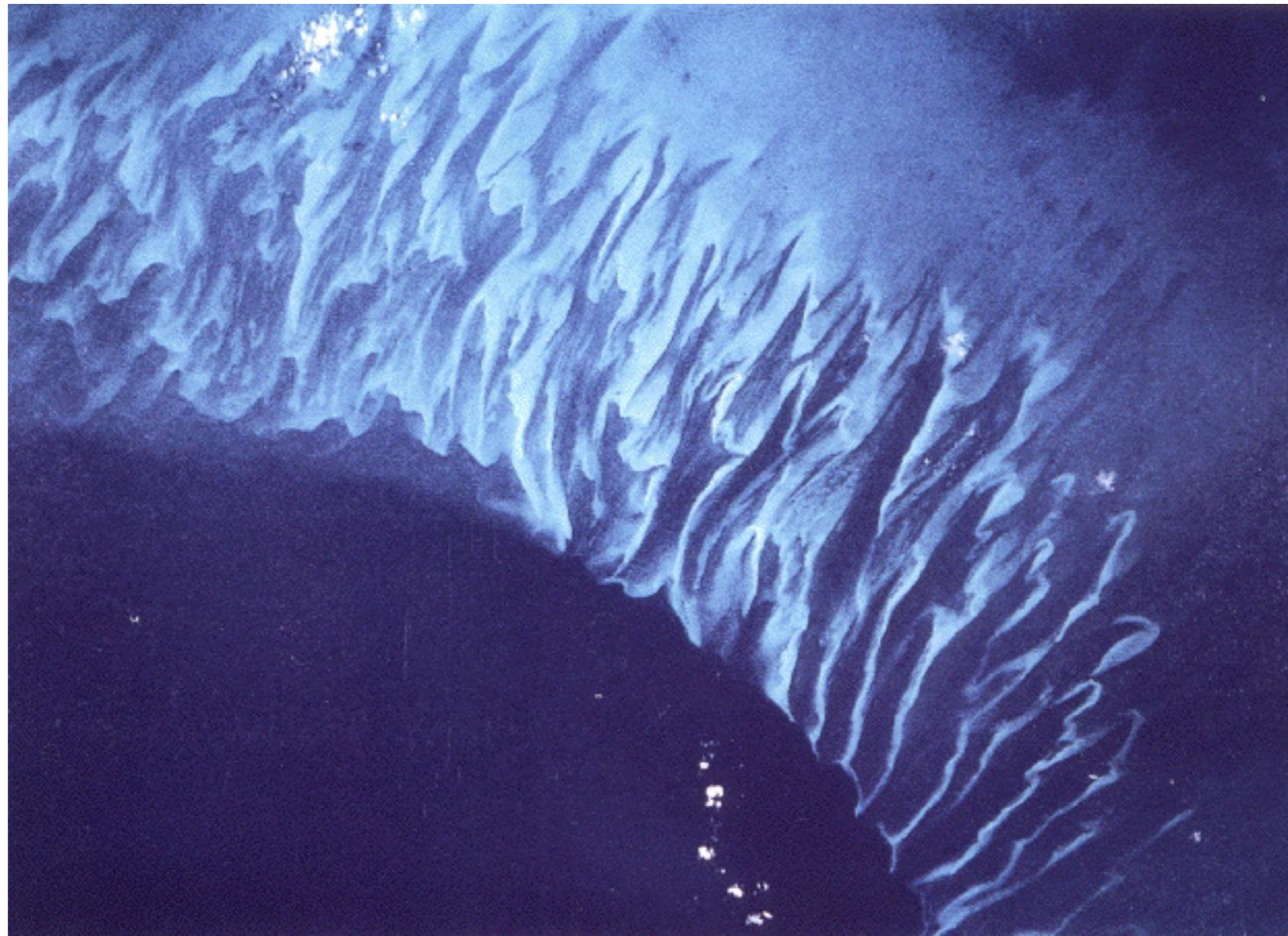


La géométrie fractale



Sciences rationnelles

Tous les concepts sont définis par des mesures !



Des nombres !



Modèle mathématique : lois de la Nature ou lois spéculatives



Prédiction et confirmation par mesures



Notre représentation du monde :
comment on le décrit ?
quels outils mathématiques ?

Notre représentation du monde :
comment on le décrit ?
quels outils mathématiques ?

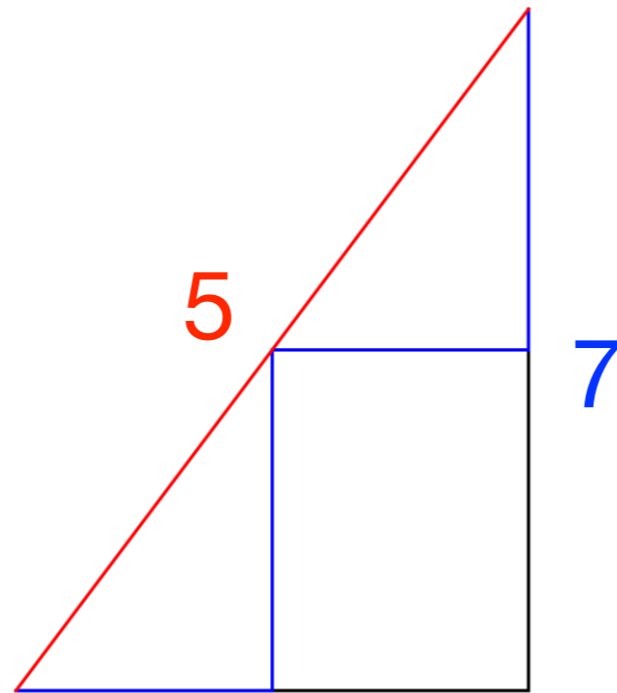
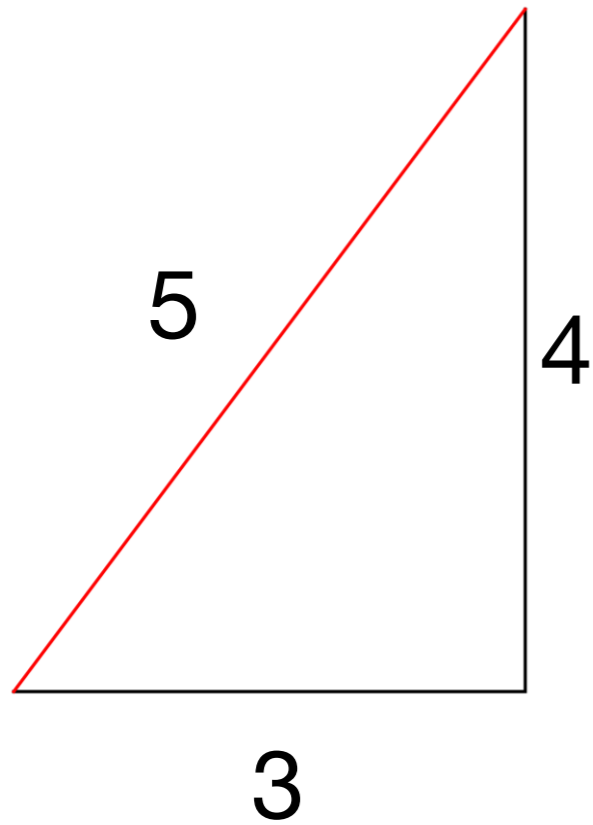
A l'école :

- L'arithmétique
- L'algèbre
- Les théorèmes
- La géométrie et la géométrie analytique (Descartes)

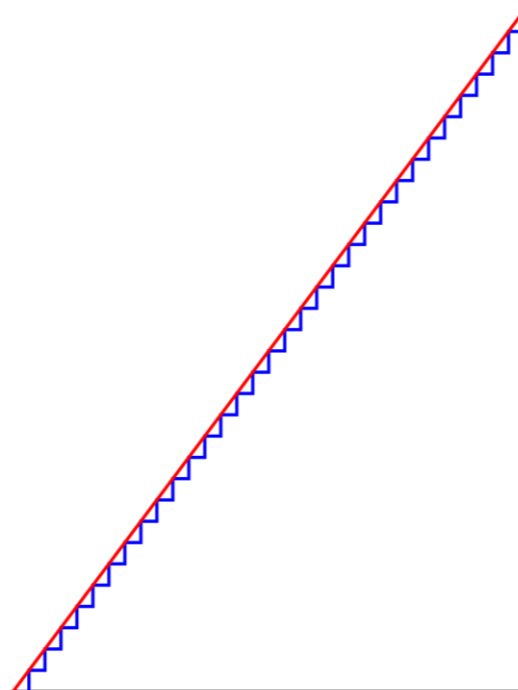
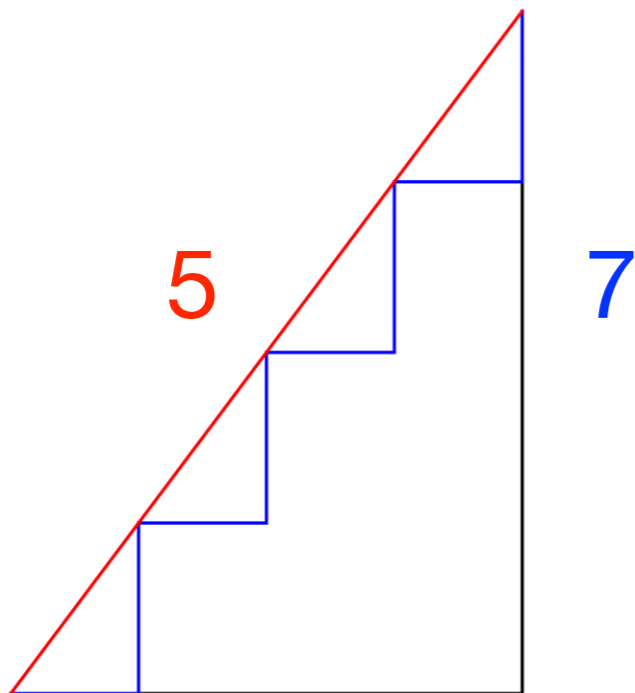
la somme de 3 nombres consécutifs est un multiple de 3

L'équation d'un cercle, d'une droite, d'une parabole, hyperbole, etc...
L'équation des tangentes, le calcul des surfaces, etc...

Mais est-ce tout ?



Quelques paradoxes
dans notre vision
de la géométrie



$5 = 7$ est-ce faux ou vrai ?



David Hilbert (1862 – 1943)

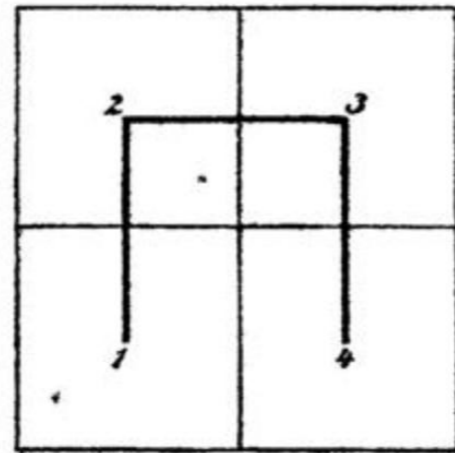


Fig. 1.

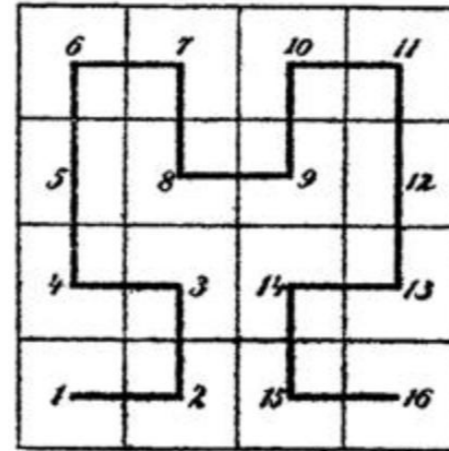


Fig. 2.

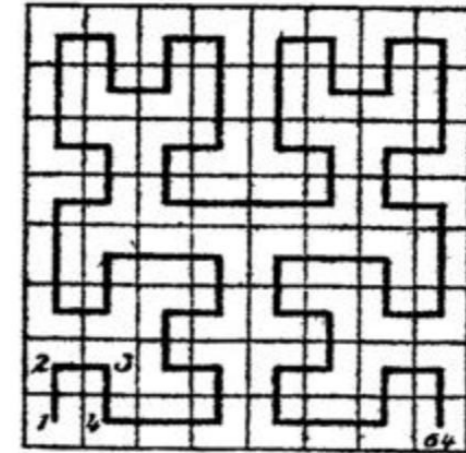
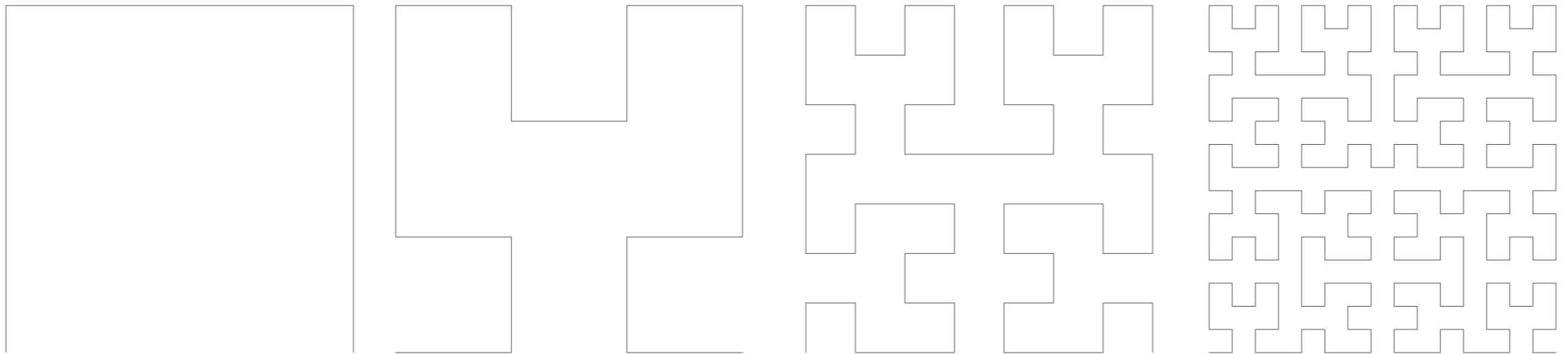


Fig. 3.

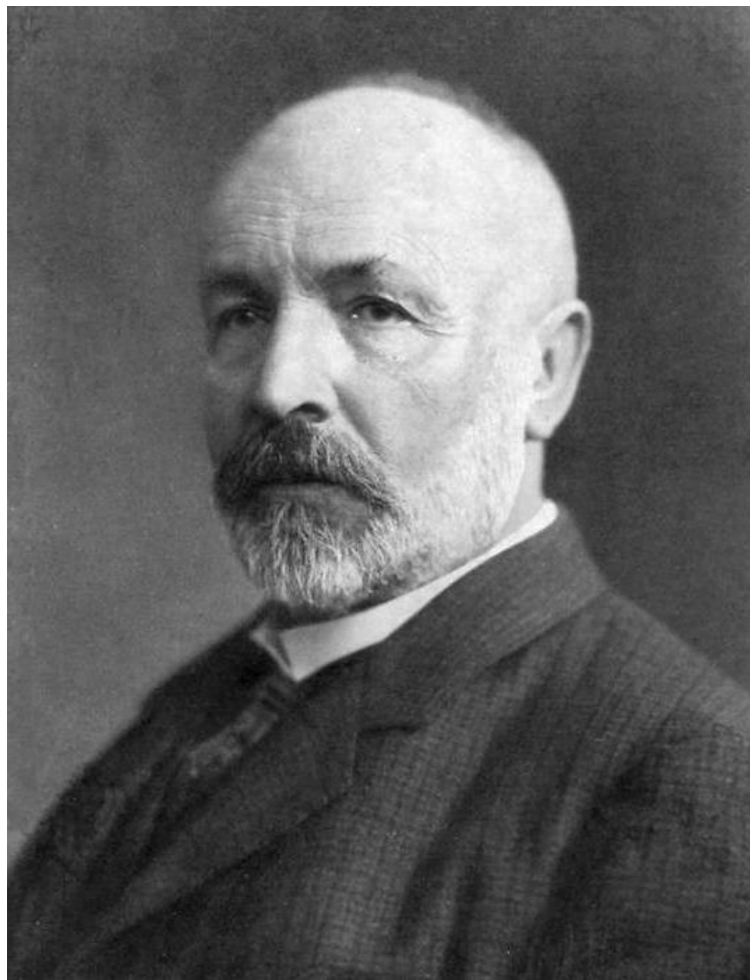
1891

Sur la représentation continue d'une ligne sur un morceau de surface



autant de points dans une ligne que dans un carré !

Une ligne et une surface ce n'est pas la même chose ?!



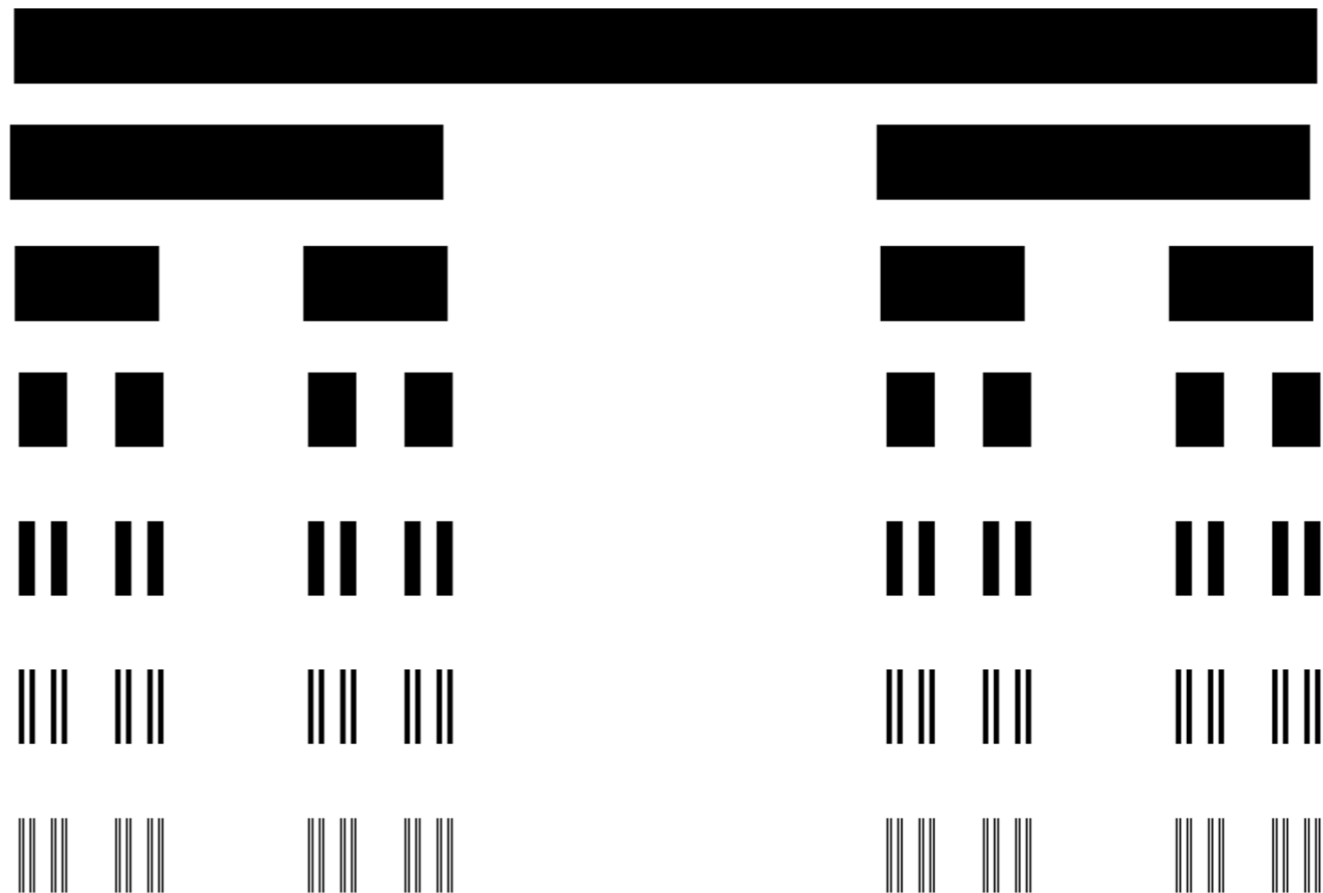
Georg Cantor 1845-1918

Père de la théorie des ensembles

Etudie les ensembles infinis et leur cardinalité

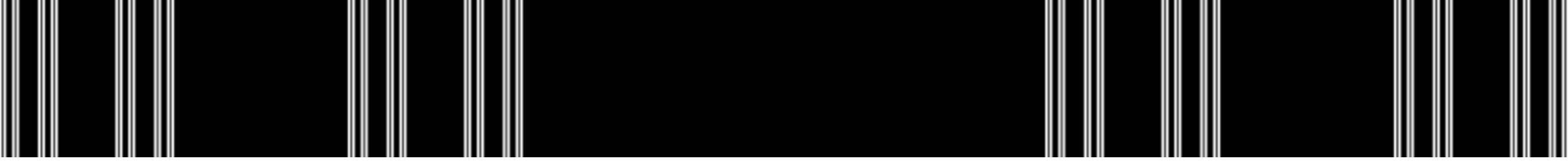
Quel est le nombre d'éléments d'un ensemble ?

- Autant de fractions que de nombres entiers !
- Plus de nombres réels que de nombres entiers !
- Différents Infinis !



Plus rien ? Et toujours infini !?

Si on “zoom” on retrouve toujours la même structure

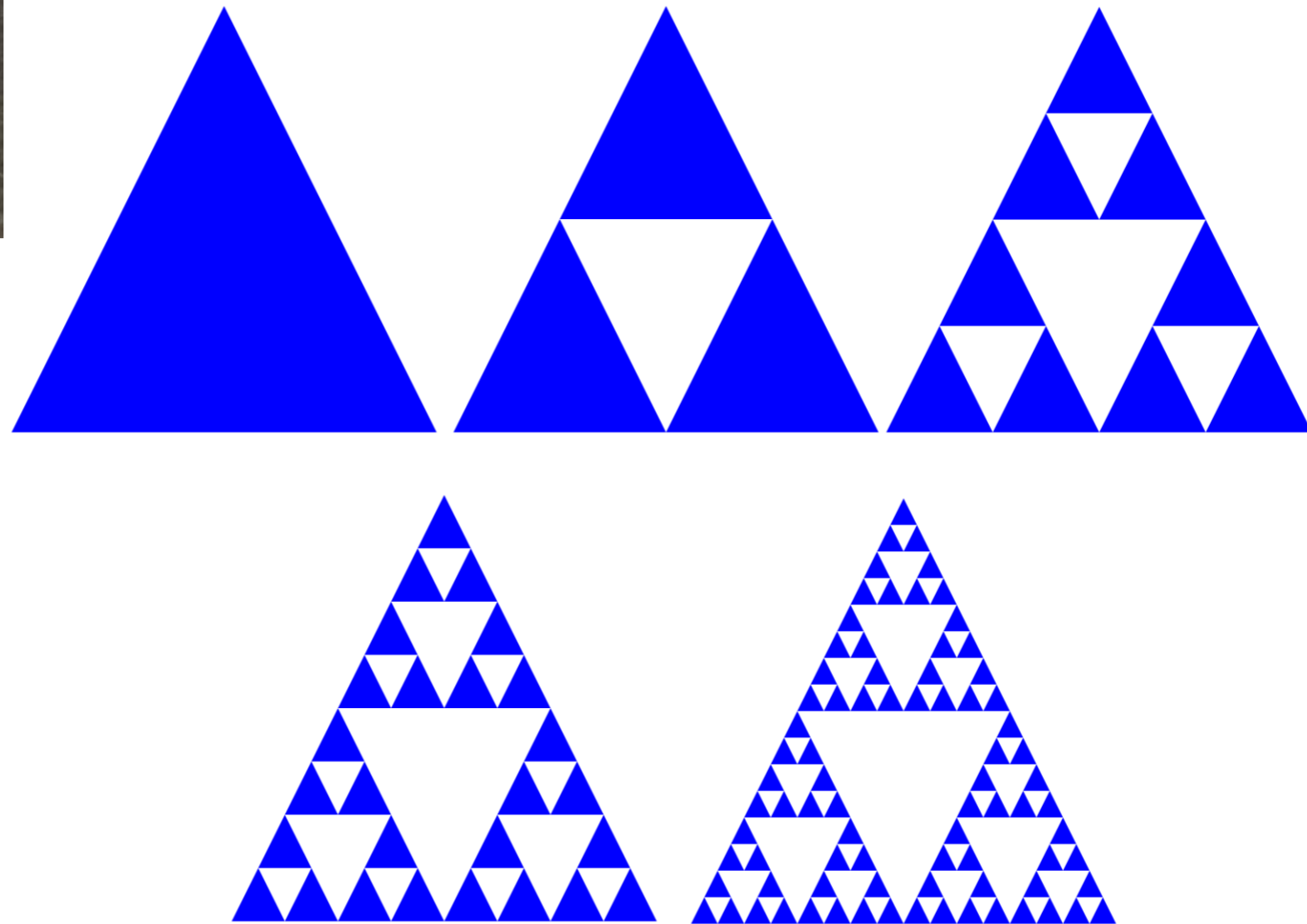




Wacław Franciszek Sierpiński (1882 – 1969)

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur une courbe dont tout point est un point de ramification.* Note (1) de M. **W. SIERPINSKI**, présentée par M. Émile Picard.

1915



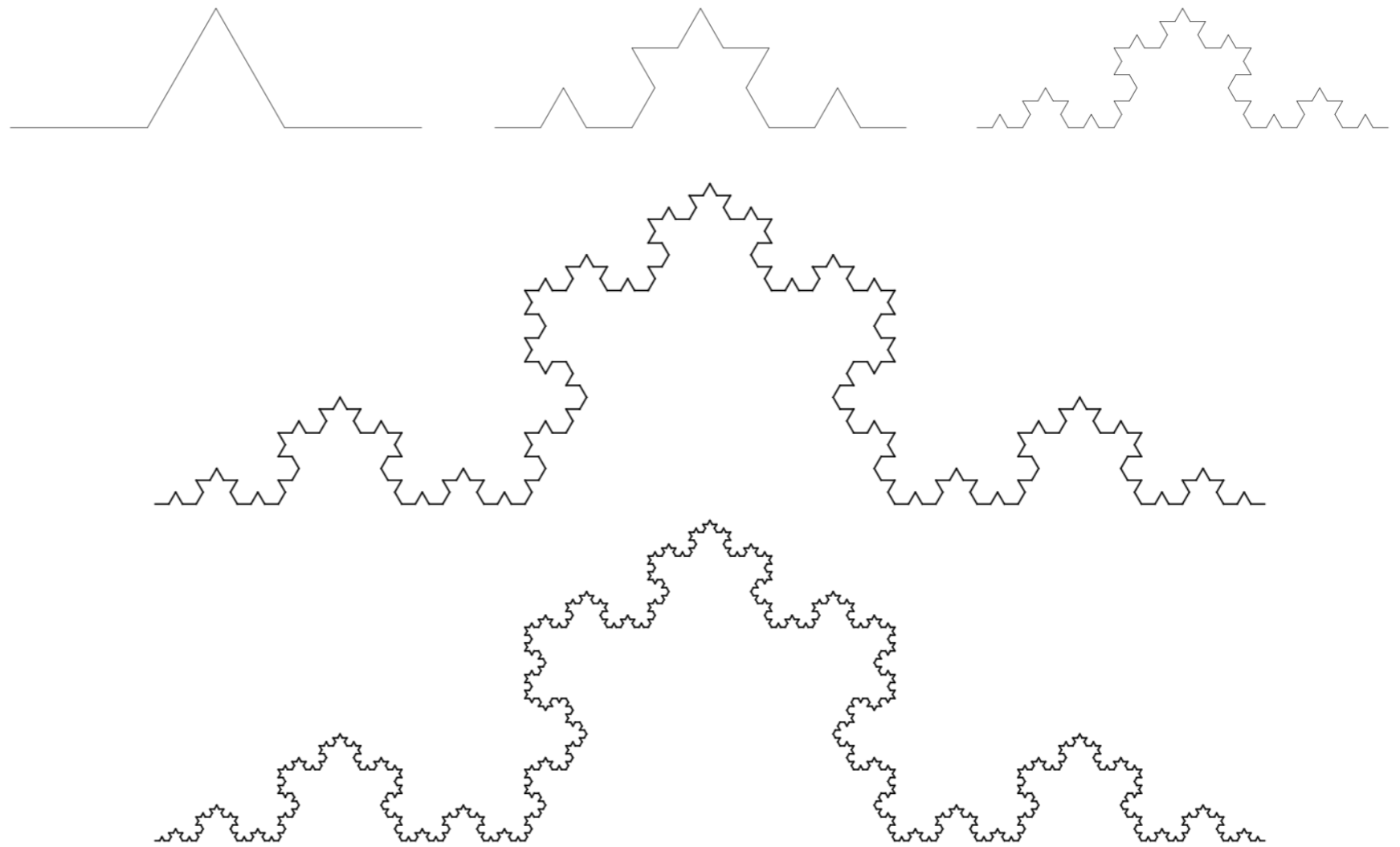
Chaque point est une frontière avec 3 voisins (ou plus)



Helge von Koch (1870 – 1924)

"Sur une courbe continue sans tangente, obtenue par une construction géométrique élémentaire"

1904



Cette ligne existe et n'a pas de tangente !

Notre représentation du monde
s'est toujours basée sur la géométrie !

Notre représentation du monde
s'est toujours basée sur le calcul !

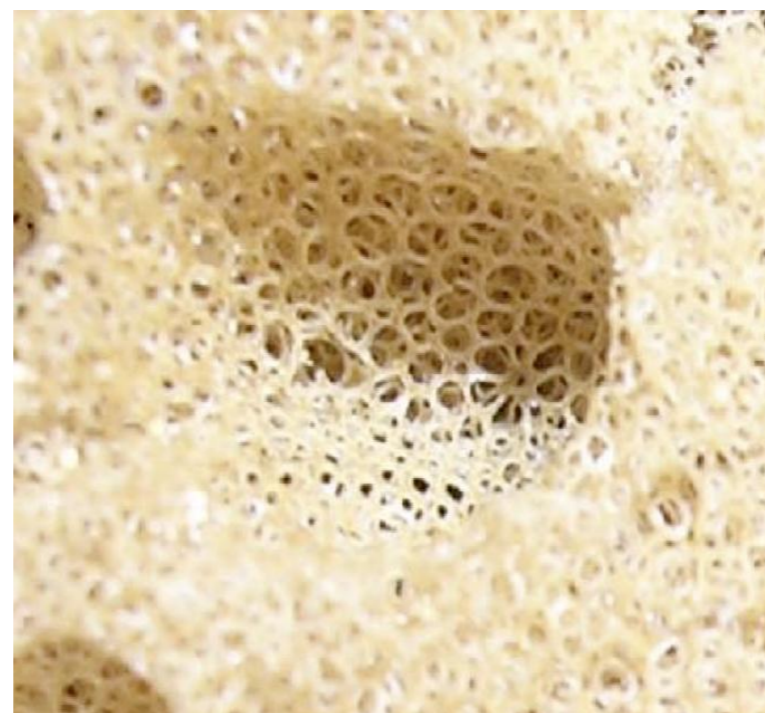
Doit-on en changer ? !

Ou plutôt l'élargir ? !



Benoit Mandelbrot né en 1924 en Pologne,
décédé octobre 2010

« The **fractal** geometry of nature » (1982)



Comprendre la complexité

Tout semble régulier dans
l'irrégularité ? !

Il se pose la question : quelle est la longueur de la côte britannique?



100 km : longueur = 2800 km



50 km : longueur = 3400 km

Il abandonne les lignes “douces”

Il va abandonner la “douceur” de la géométrie

Il va briser les courbes : les fractaliser. Il introduit plusieurs concepts :

1° changement d'échelle

2° copies d'éléments

3° étendre la notion de **dimension** : la dimension fractale

Dans la nature on doit se préoccuper de situation où la dimension n'est pas un nombre entier : des structures plus complexes !



Boulette de papier : petit exercice:

on divise en 2 la feuille de papier, la masse est divisée par 2 : $M_k = m2^{-k}$

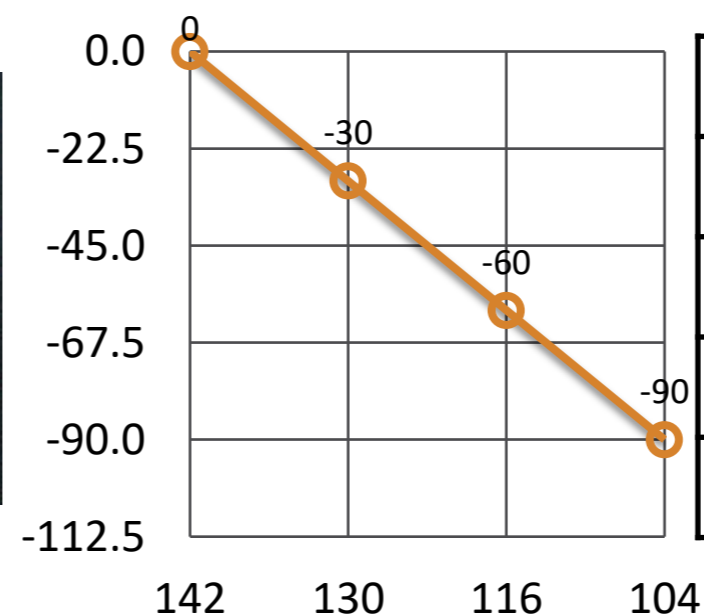
Quel est le rayon R de la boule ?

Masse d'une boule $\equiv R^3$

on s'attend à $\log(M) = c + 3\log(R)$

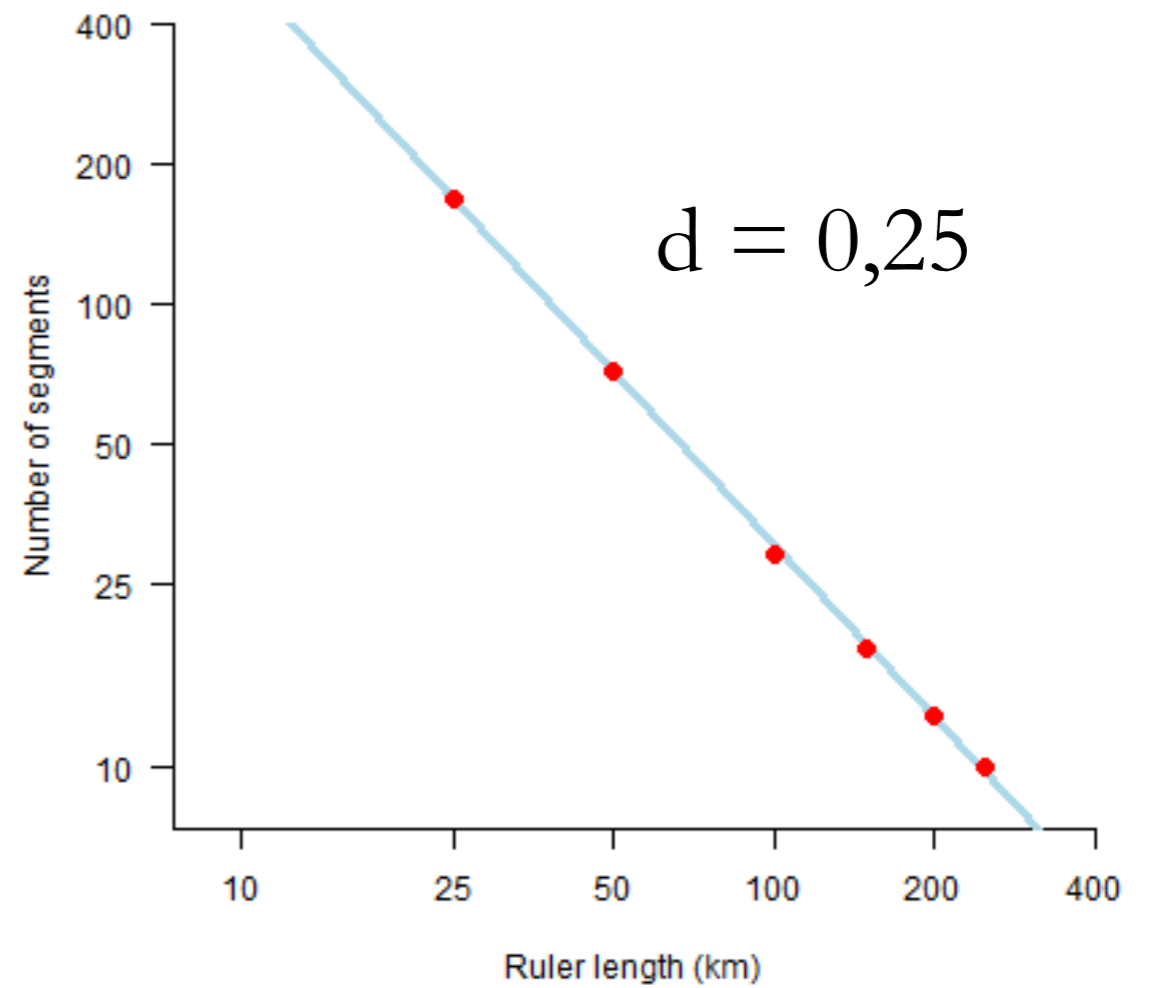
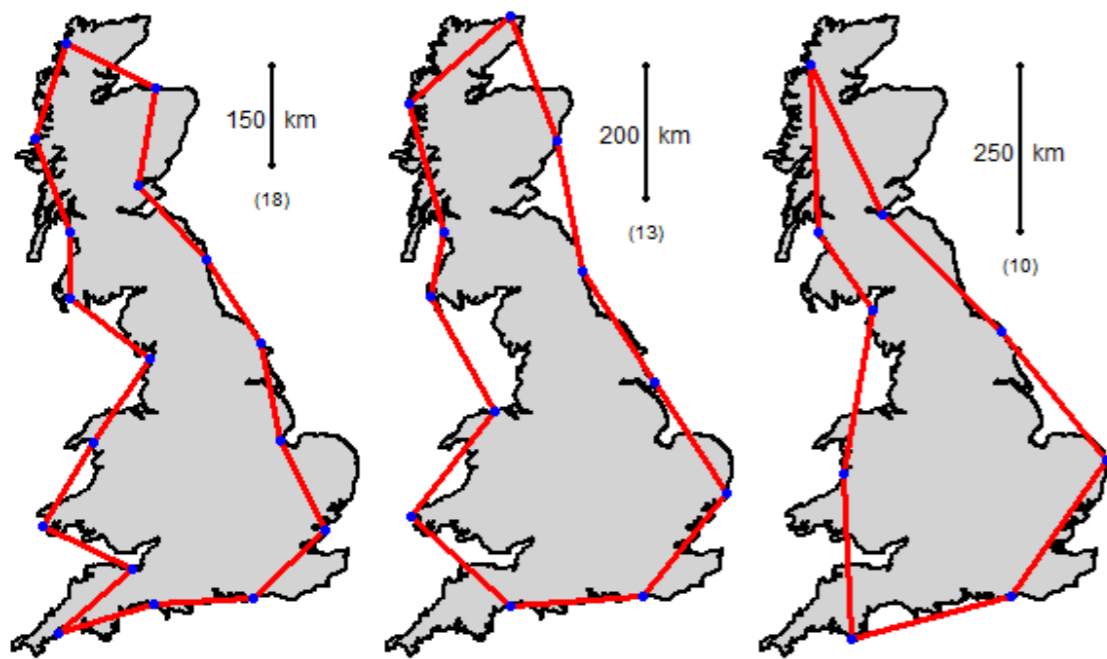
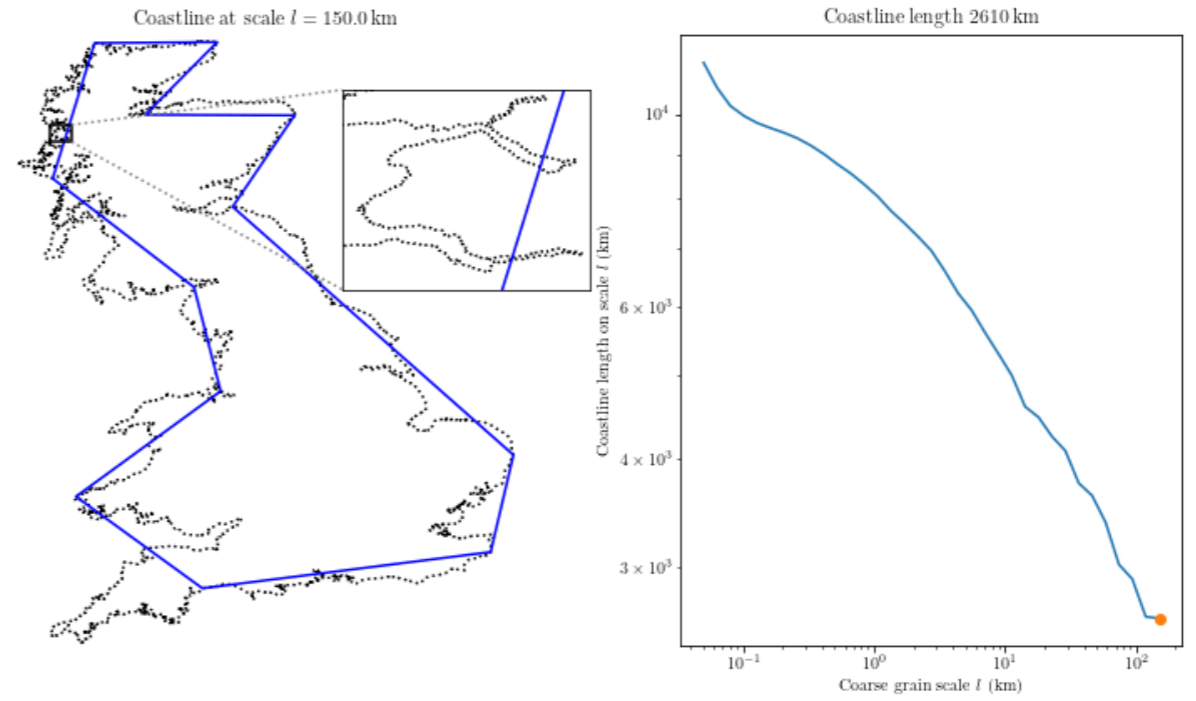
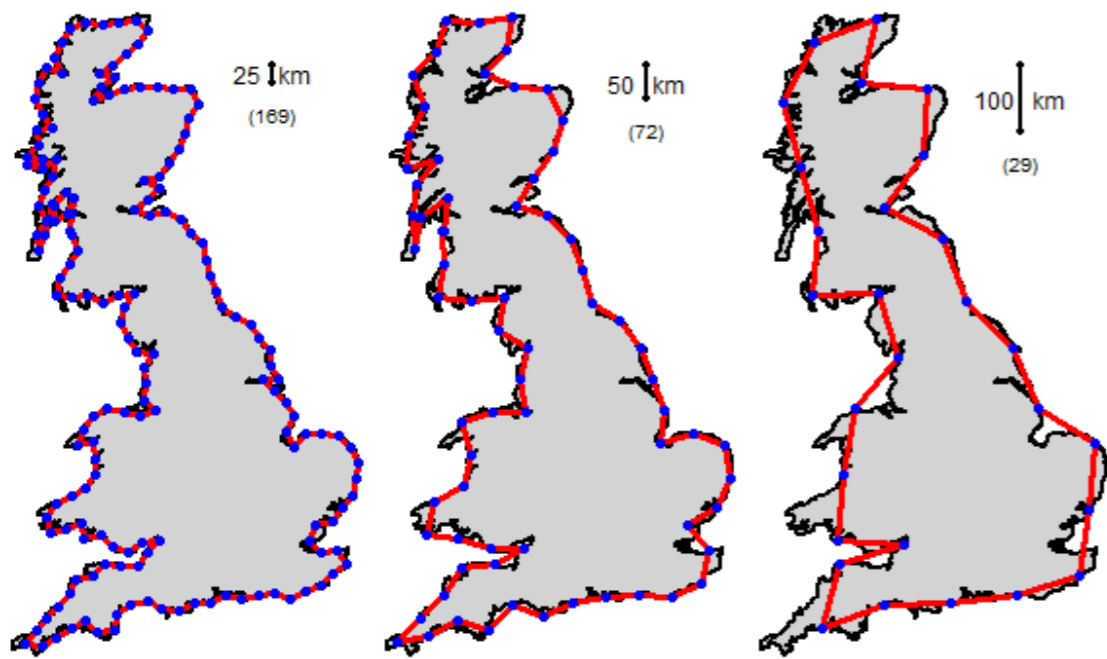
on obtient $\log(M) = c + 2.5\log(R)$

moins qu'un volume !

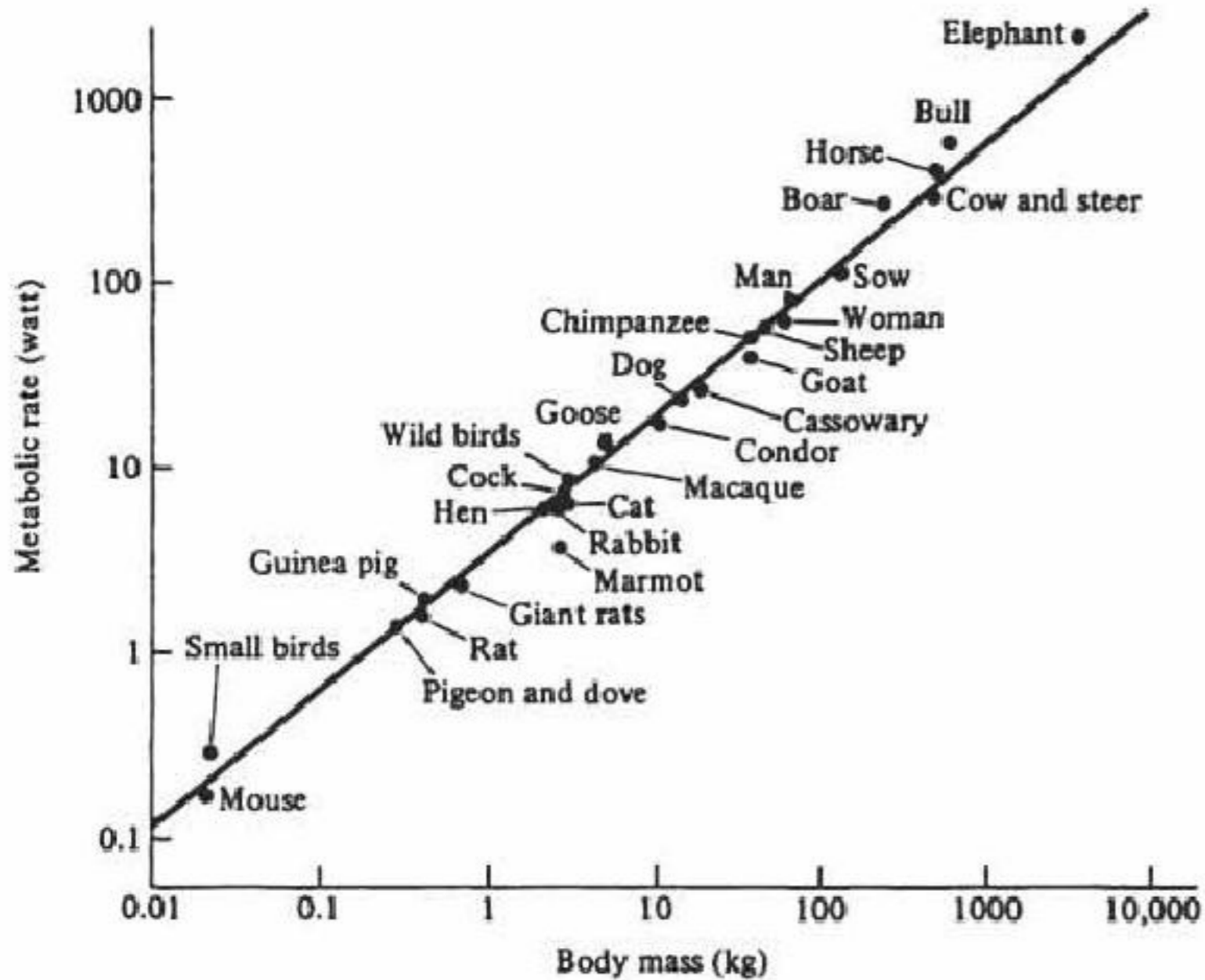


masse	diamètre	rayon	log(rayon)	log(masse)
1	53	26.5	1.42	0
0.5	40	20	1.30	-0.30
0.25	29	14.5	1.16	-0.60
0.125	22	11	1.04	-0.90

$\text{Log}(M) = c + 3\log(R)$



Facteur d'échelle partout

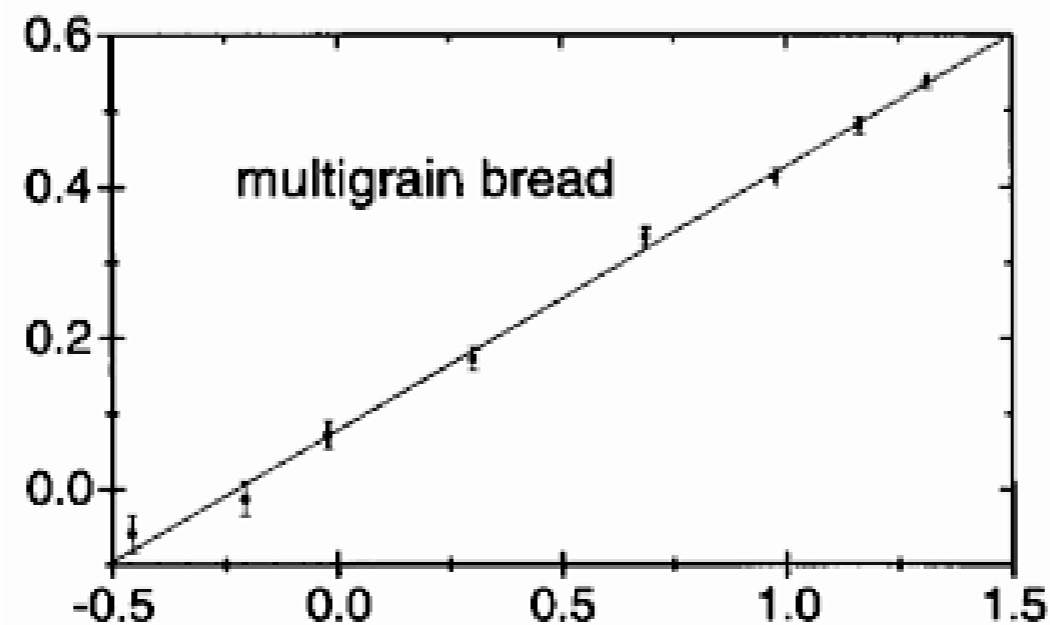
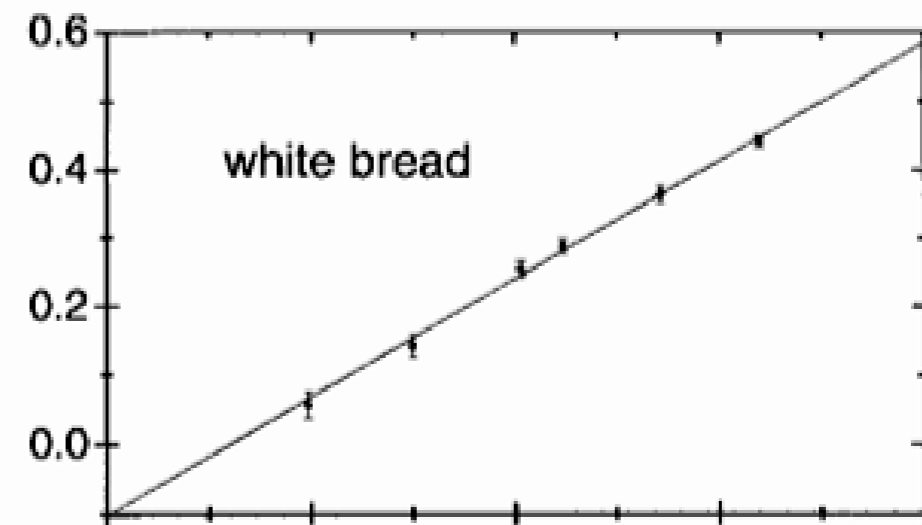
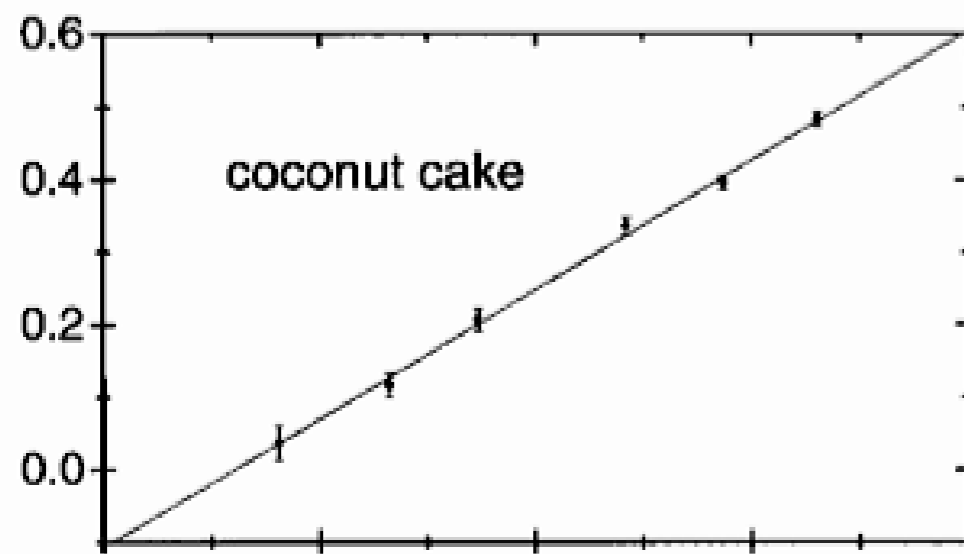


pende = 0.75

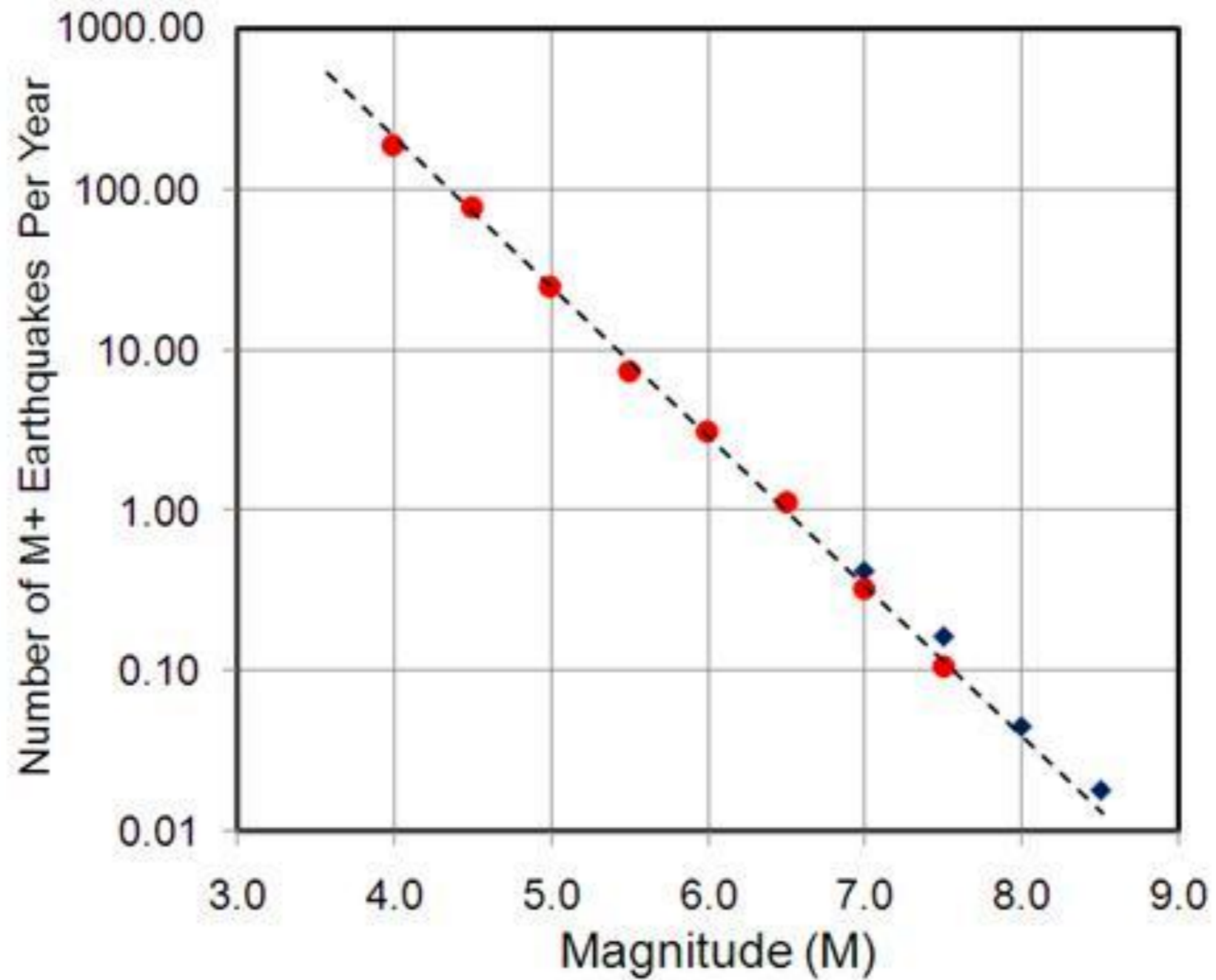
Le métabolisme n'est pas proportionnel au volume !

Les “trous” dans le pain

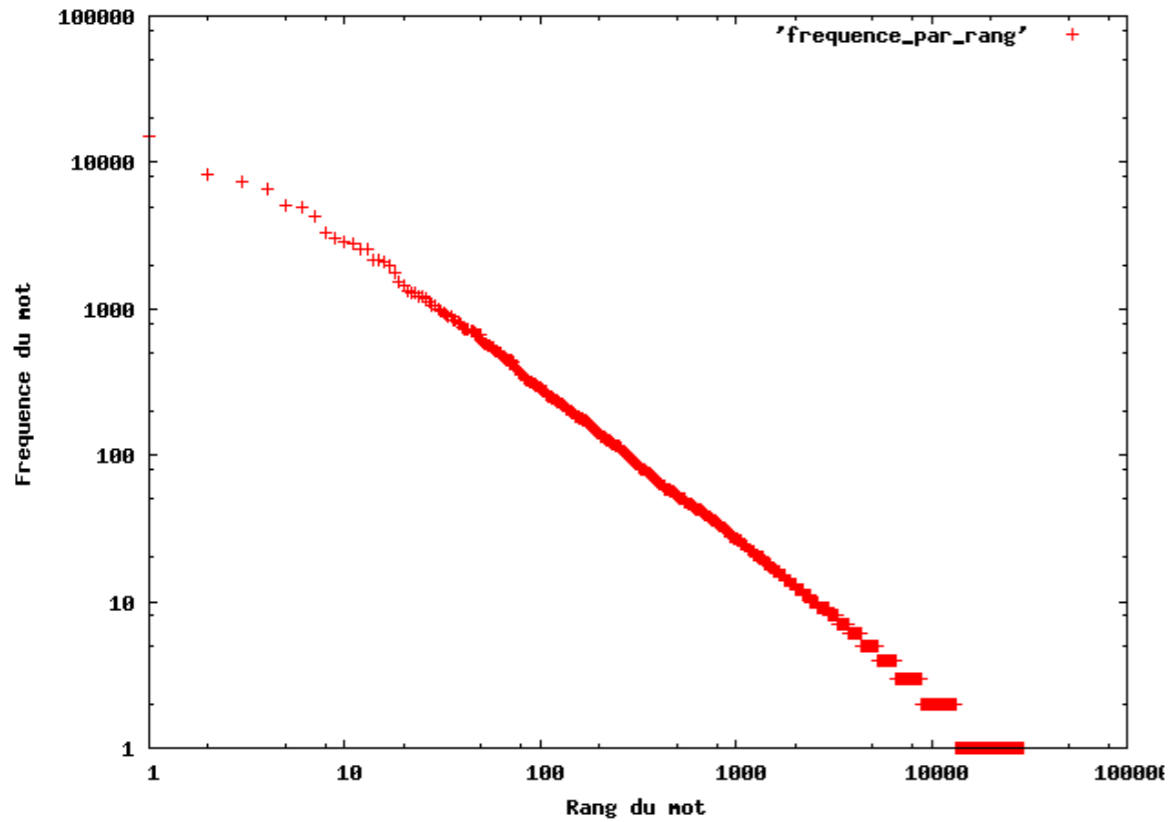
Fig. 1. Log-log plots of the ball diameters for squashed breads (and cake) versus mass. Mass was measured in grams and diameter in centimeters.



Le nombre de tremblements de terre en fonction de leur intensité

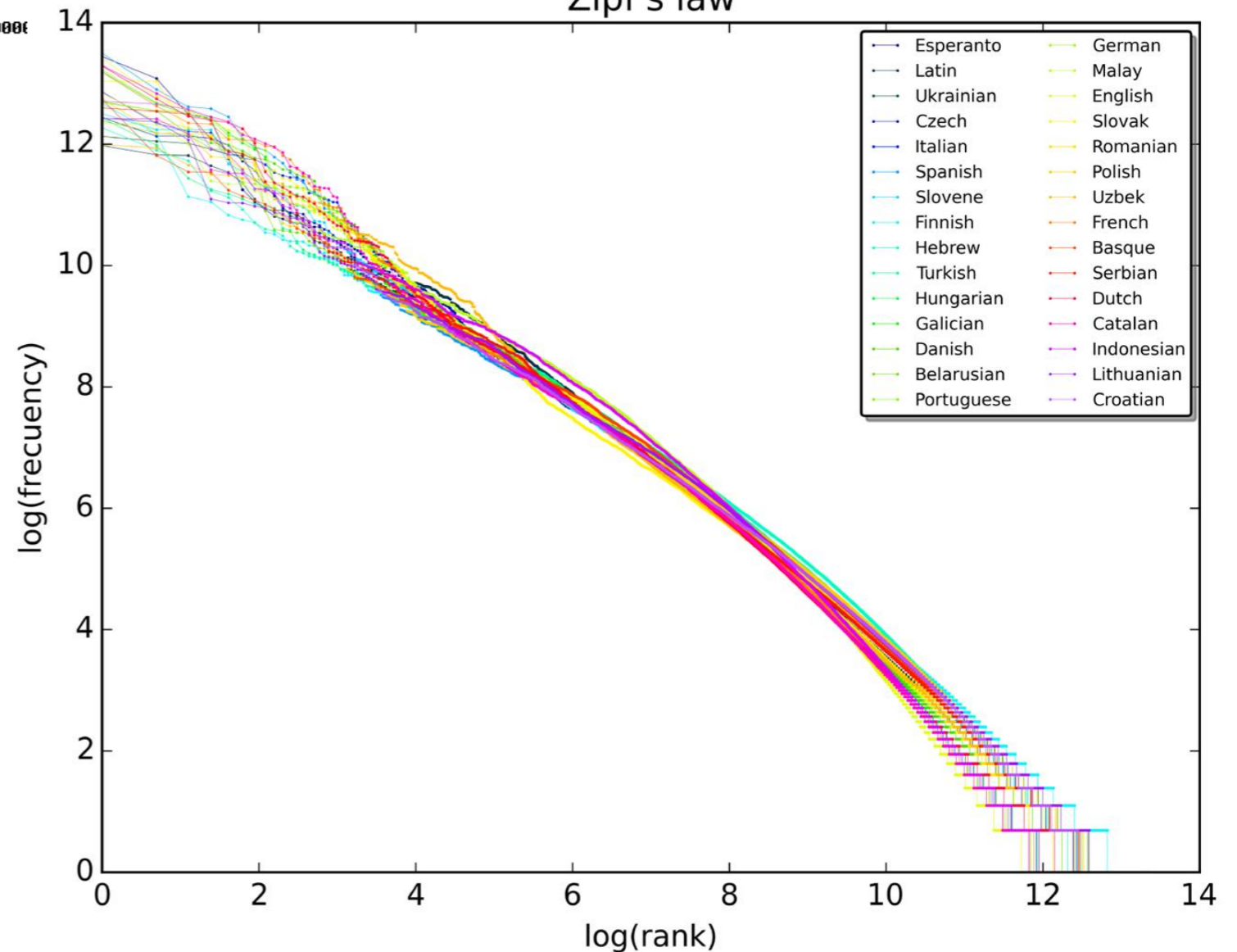


Loi de Zipf ("Ulysses" de James Joyce (en anglais))



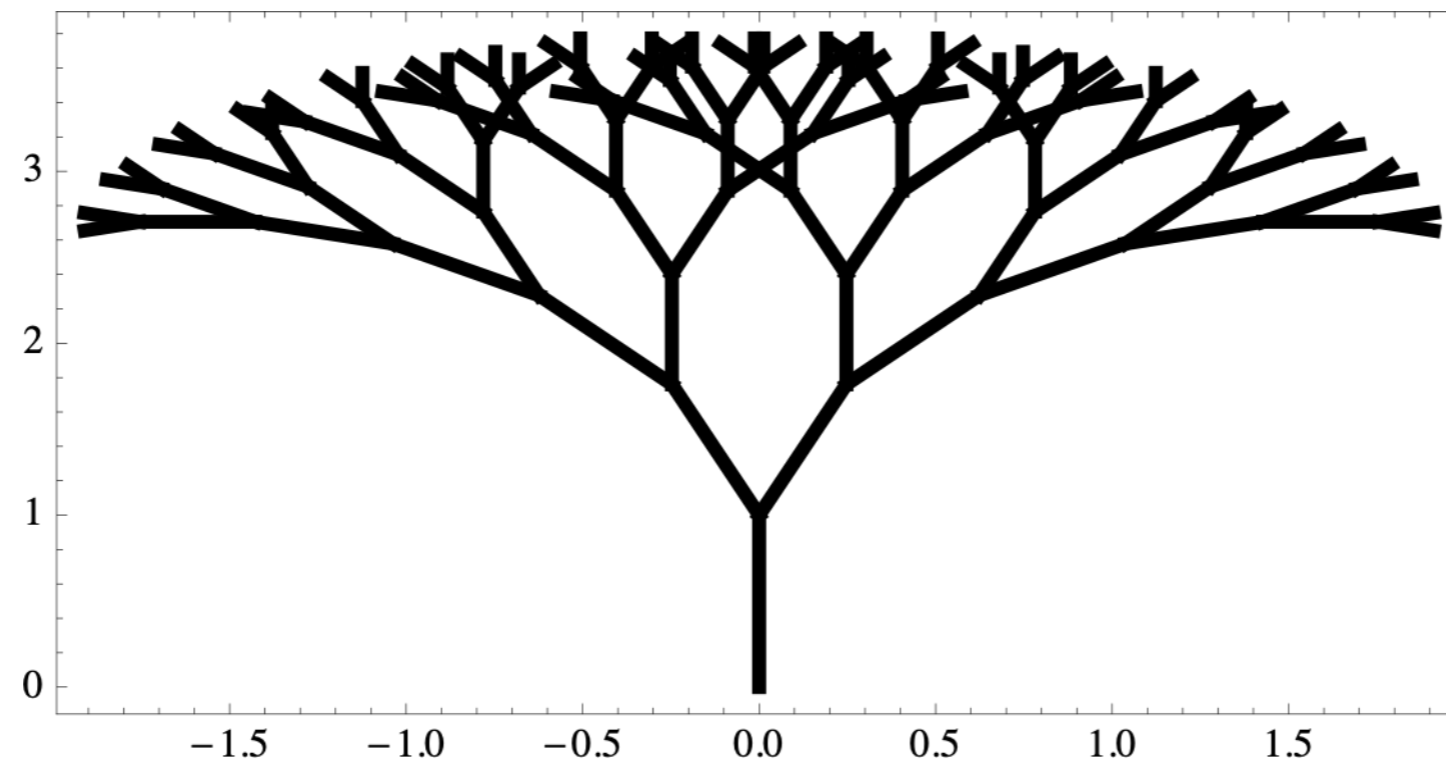
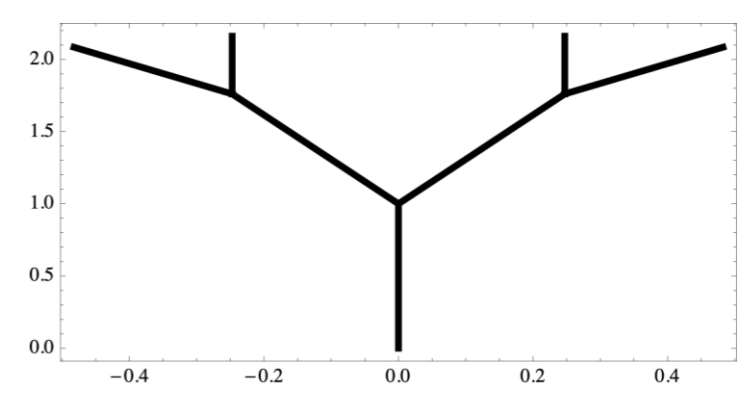
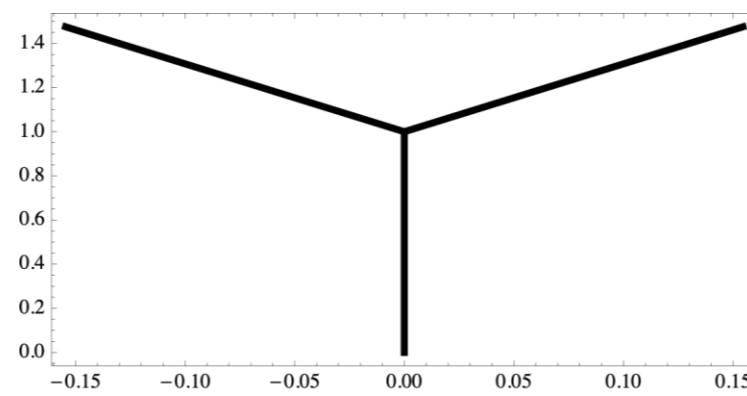
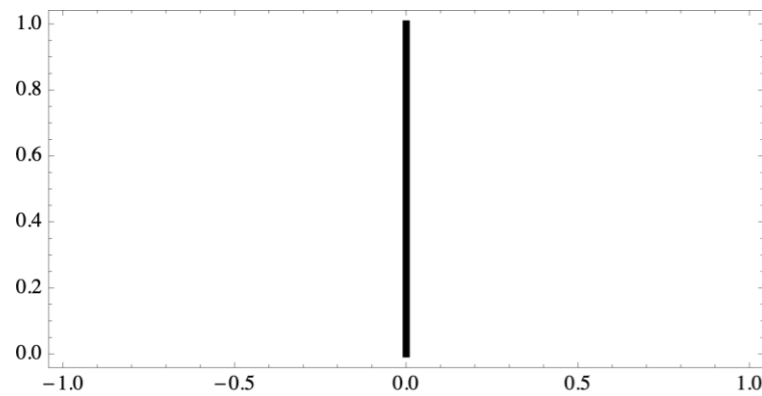
Même dans les langues
le mot le plus courant revenait 8 000 fois ;
le dixième mot 800 fois ;
le centième, 80 fois ;
et le millième, 8 fois.

Zipf's law



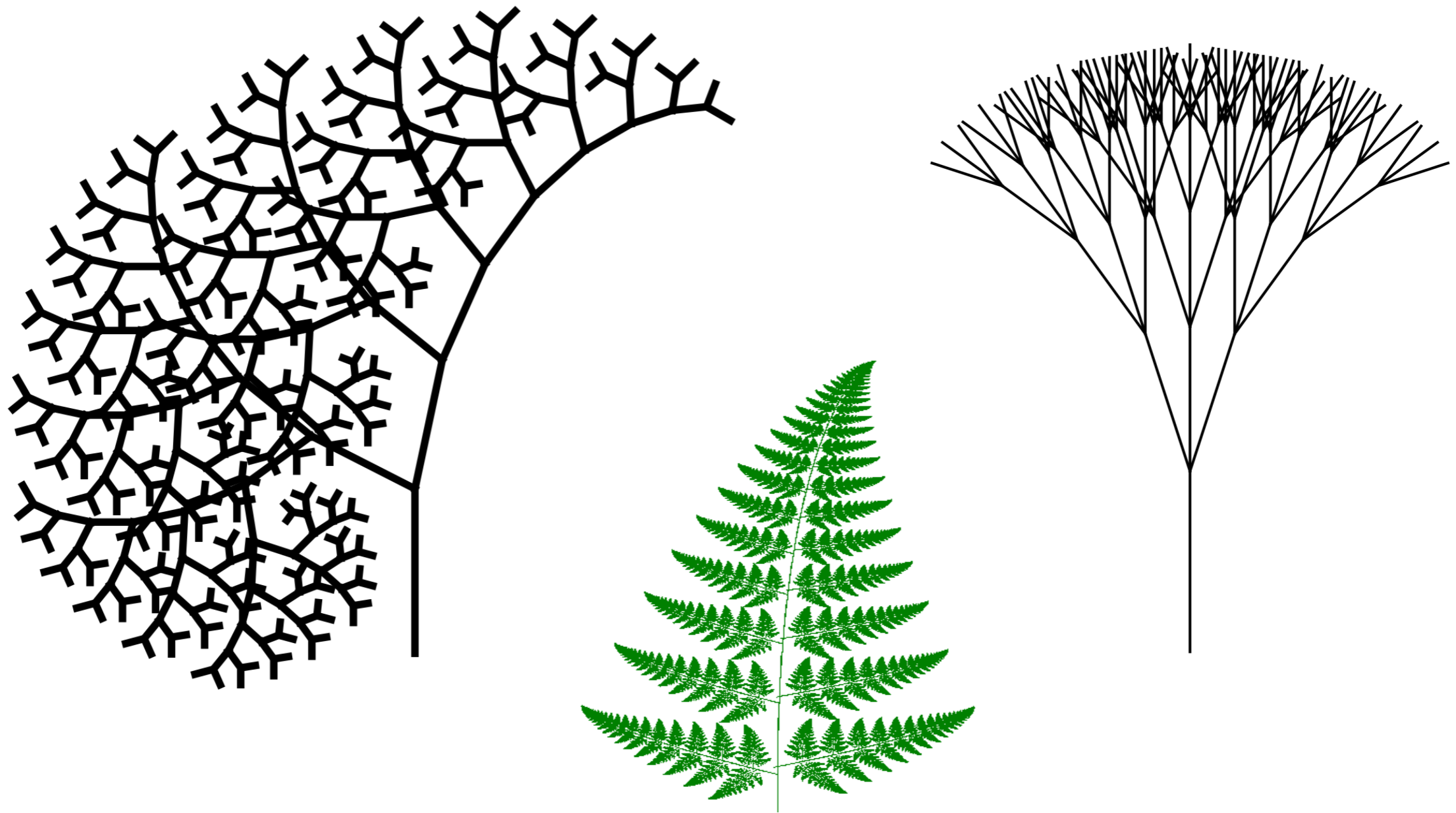
Développement de structure avec le même principe :
changer d'échelle et "coller" les éléments : fractale

Quelques opérations simples: translation; rotation; échelle



On a les "équations" pour les plantes, arbres, etc

On change le nombre de copies, l'angle de rotation, les échelles, etc...

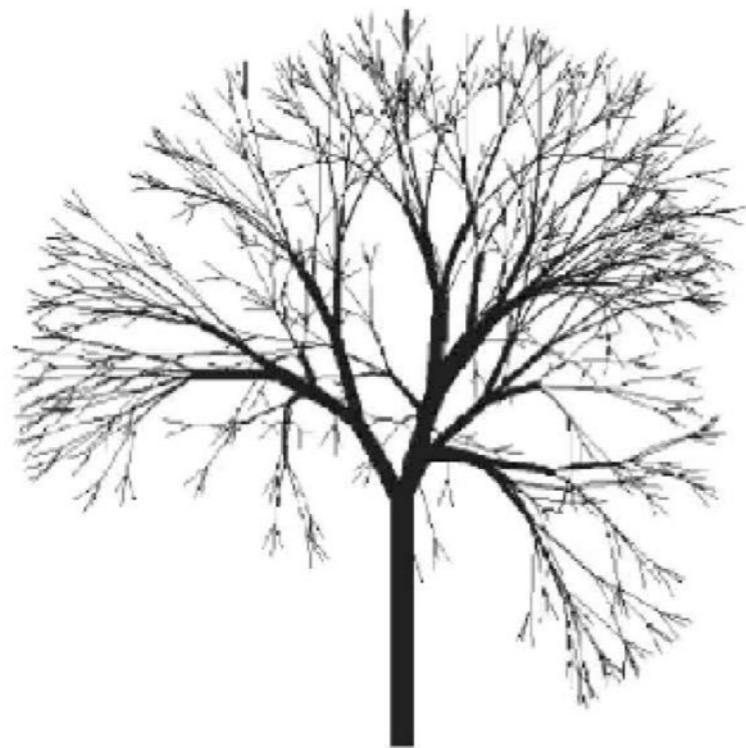




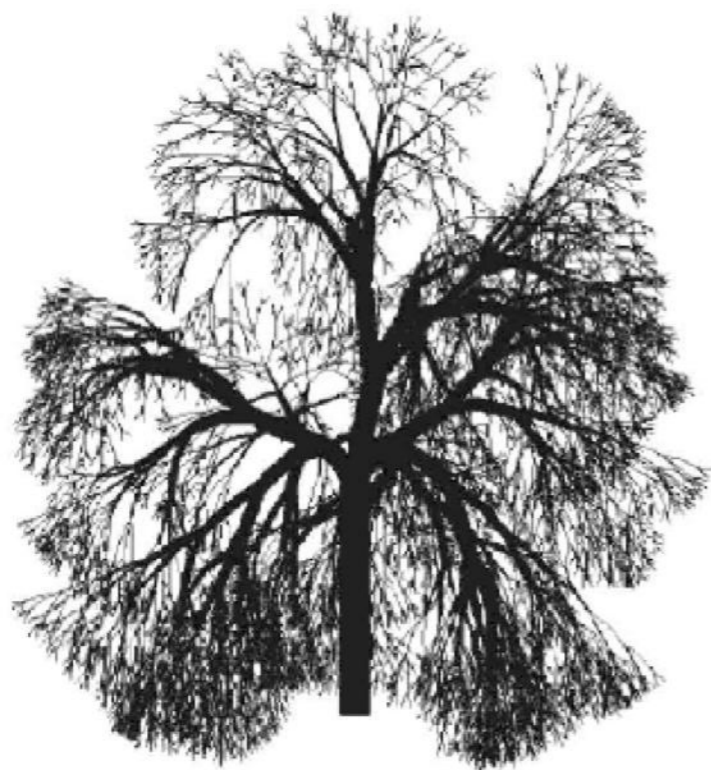
Thelypteridaceae



Leptosporangiate

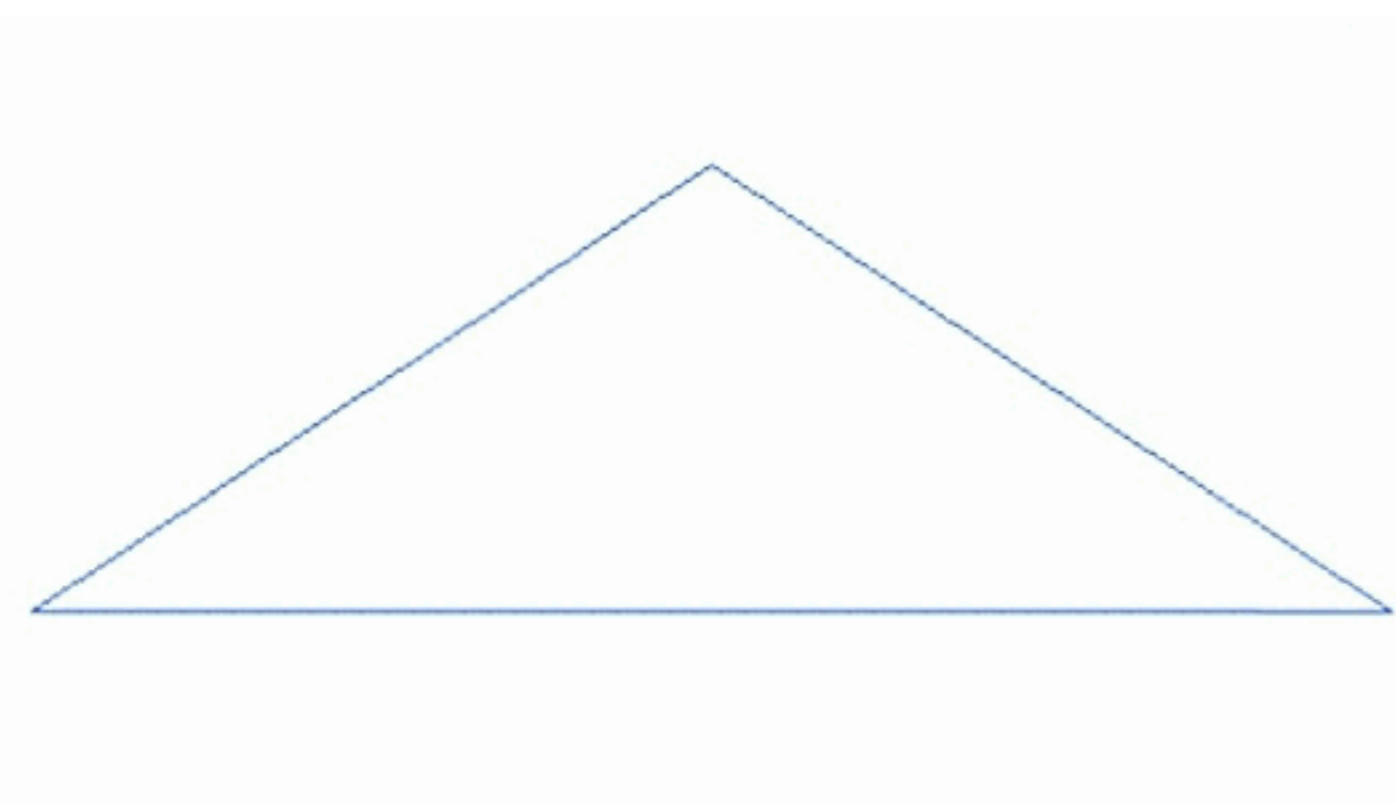


On a “enfin” une équation pour les arbres

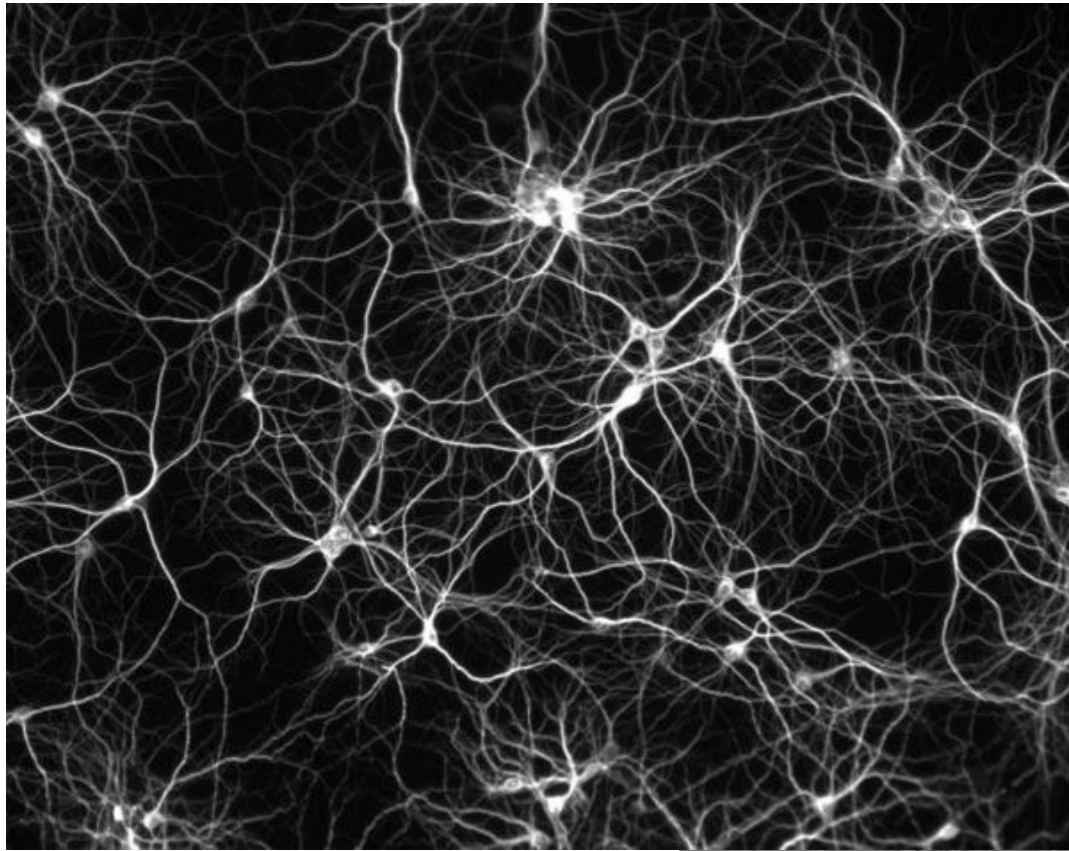




Mais aussi pour les nuages, les montagnes, les cailloux, les plages, etc...



On a les “équations” pour les connections entre neurones !



Ici : la diffusion aléatoire du cuivre



- La géométrie fractale a augmenté notre vision du monde et permet de représenter la complexité dans la nature
- Tout changement de représentation amène de nouvelles perspectives en sciences
- Il faut toujours plus d'imagination pour construire des concepts nouveaux et utiles



merci de votre écoute